Ce document fournit les idees pour corriger certains exercices non entierement traites en TD ou plus importants que les autres.

Certaines corrections ne contiennent que les idees de la preuve, ells ne doivent en *aucun cas* etre consideres comme des corrections completes, qui demandent plus de redaction. (En particulier pour les TDs a rendre ou pour les partiels).

TD1 : preliminaires

Exercice 0.1

$$\begin{array}{rcll}
A \text{ est valide} & \iff & \forall v, [A]v = 1 & \text{Par definition} \\
& \iff & \neg\neg(\forall v, [A]v = 1) & \text{Par double negation} \\
& \iff & \neg(\exists v, \neg([A]v = 1)) & \text{Regle du } \neg \text{ et du } \forall \\
& \iff & \neg(\exists v, [A]v = 0)) & \text{Tiers exclu: } [A]v = 0 \text{ ou } 1 \\
& \iff & \neg(\exists v, [\neg A]v = 1)) & \text{Definition du } \neg \text{ des formules} \\
& \iff & \neg A \text{ n'est pas satisfiable} & \text{Par definition}
\end{array}$$

Exercice 0.2

Cet exercice et le suivant se traitent par induction sur la taille de la formule. L'opérateur "taille" sur un ensemble librement engendre peut toujours etre defini par :

- La taille d'un symbole d'arite 0 vaut vaut 0.
- La taille d'un terme k de la forme $l(t_1, ..., t_n)$ vaut le max des tailles de $t_1, ..., t_n$ plus 1.

Defini ainsi, la taille est un ordre bien fonde sur l'ensemble (en tant que plongement monotone dans $\mathbb{N}$).

La preuve est par induction sur la formule A, la propriete a prouver etant $\forall A, (\mathit{Vars}(A) \subset X \wedge v_{|X} = v'_{|X}) \implies [A]v = [A]v'$

- si $A = x$: alors $[x]v = [x]v'$, car $x \in \mathit{Vars}(a) \subset X$ et les restrictions de v et v' a X sont egales.
- si $x = A_1 \wedge A_2$: A_1 et A_2 sont strictement plus petits que A pour l'ordre taille, donc on peut leurs appliquer l'hypothese d'induction.

  On a egalement $\mathit{Vars}(A_1) \subset \mathit{Vars}(A)$ et $\mathit{Vars}(A_2) \subset \mathit{Vars}(A)$ par definition de Vars, et donc $v_{|\ \mathit{Vars}(A_1)} = v'_{|\ \mathit{Vars}(A_2)}$. Donc les hypotheses d'induction sont verifies.

  Appliquer l'hypothese d'induction sur A_1, nous donne $[A_1]v = [A_1]v'$. En l'appliquant sur A_2, on obtient $[A_2]v = [A_2]v'$. Par consequent, $[A]v = [A]v'$.
- si $x = A_1 \vee A_2$: exactement identique au cas ci-dessus.
- si $x = \neg A'$: similaire au cas ci-dessus, en n'appliquent l'hypothese de recurrence qu'a A'.

TD 3 : Calcul propositionnel 2

Exercice 0.11

$$x \vee y = \mathsf{ITE}(x, 1, \mathsf{ITE}(y, 1, 0)) = \mathsf{ITE}(x, x, y)$$
$$x \wedge y = \mathsf{ITE}(x, \mathsf{ITE}(y, 1, 0), 0) = \mathsf{ITE}(x, y, x)$$
$$\neg x = \mathsf{ITE}(x, 0, 1)$$

Donc on a besoin des fonctions constantes pour exprimer $\neg$, mais pas pour $\vee$ ou $\wedge$.

Exercice 0.12

Theoreme 1. *Toute fonction de $2^n \to 2$ s'exprime a l'aide des operateurs des operateurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$*

Il suffit de mettre la formule en CNF ou en DNF. On peut exprimer les fonctions constantes 0 et 1 par $0 = x \wedge \neg x$ et $1 = x \vee \neg x$.

Corollaire 1. *Toute fonction de $2^n \to 2$ s'exprime uniquement a l'aide de $\wedge$ et $\neg$ ou de $\vee$ et $\neg$.*

Preuve : Trivial d'apres les lois de Morgan.

Question 3 :] D'apres le resultat precedent, il suffit d'exprimer $\neg$ a l'aide de 1, $\wedge$ et $\oplus$. On voit facilement que $\neg x = x \oplus 1$.

TD 4 : Calcul propositionnel 3

Exercice 0.14

(1) Les ecritures 1, 2 et 3 proposees couvrent tous les cas possible pour une clause de Horn, il suffit de montrer que la condition sur i et j est vraie.

Si les deux termes identiques sont deux negations $\neg x$: on peut en enlever une des deux, etant donne que $\neg x \vee \neg x \equiv \neg x$, et que $\neg$ est associatif et commutatif.

Si un terme est $\neg x$ est l'autre est x : on peut enlever la clause, car $\neg x \vee \neg x \equiv 1$

(2) Si la formule ne contient pas de clauses de la forme 1, l'assignation mettant toutes les variables a faux est solution.

Si la formule ne contient pas de clauses de la forme 2, l'assignation mettant toutes les variables a vraie est solution.

(3) Par induction sur la taille de la formule: Si la formule ne contient pas de clauses de la forme 1, OU pas de clauses de la forme 2, on sait conclure d'apres la question precedente. Sinon on choisit une clause de la forme 1. Soit x son litteral. On se rappelle recursivement sur $A[1/x]$; en effet, x doit etre vrai dans cette formule pour qu'elle soit satisfiable.

Complexite : chaque iteration se fait en temps lineaire en la taille de la formule, et on itere au plus "nombre-de-clauses" fois. Donc la complexite est quadratique dans le pire des cas.

Exercice 0.15

Cf. le fichier `corrige-decodeur.pdf`

TD 5 : Langages formels et automates finis

Exercice 0.18

La preuve doit etre tres rigoureuse. On procede par double inclusion.

- L^* est dans $(L^*)^*$ car c'est $(L^*)^1$.
- Soit un mot w' de $(L^*)^*$. Par construction il existe un entier k et k mots $w_1, ..., w_k$ de L^* tels que $w = w_1. \cdots .w_k$. A nouveau, par definition de L^*, pour chacun des w_i il existe k_i et $w_{i,1}, ..., w_{i,k_i}$ dans L tels que $w_i = w_{i,1}. \cdots .w_{i,k_i}$.

  En substituant, on obtient $w = (w_{1,1}. \cdots .w_{1,k_1}). \cdots .(w_{k,1}. \cdots .w_{k,k_k})$. Par associativite de la concatenantion, on obtient $w = w_{1,1}. \cdots .w_{1,k_1}. \cdots .w_{k,1}. \cdots .w_{k,k_k}$ Donc $w \in L^*$, d'ou la conclusion.

Exercice 0.20

On prend $L_1 = \{a\}$ et $L_2 = \{b\}$ Alors $L_1^*.L_2^* = \{a^i.b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ et $(L_1.L_2)^* = \{ab\}^* = \{(ab)^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Donc ni $L_1^*.L_2^* \subset (L_1.L_2)^*$ (prendre a), ni $(L_1.L_2)^* \subset L_1^*.L_2^*$ (prendre $abab$).

TD 6 : Preuves par induction

Exercice 0.23

Soit un ensemble E et un relation binaire R sur E (qu'on voit comme un sous-ensemble de $E \times E$). On rappelle que la fermeture symetrique $R^{\perp}$ de R est $\{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$, la fermeture reflexive R^0 de R est $\{(x, x) \mid x \in E\}$ et la fermeture transitive R^+ de r est $\{(x_1, x_n) \mid \exists x_2, ..., x_{n-1} \in E, (x_1, x_2) \in R, ..., (x_{n-1}, x_n) \in R\}$. Notons que $R^+ = \bigcup_{k \geq 1} R^k$. La fermeture reflexive et transitive R^* de R est $R^+ \cup R^0$. C'est egalement $(R \cup R^0)^+$ ou $\bigcup_{k \geq 0} R^k$.

On pose $f((x, y), (z, w)) = \begin{cases} (x, w) & \text{si } y = z \\ (x, y) & \text{si } y \neq z \end{cases}$

Alors $R^+ = \mathsf{Ind}(E \times E, R, \{f\})$ et $R^* = \mathsf{Ind}(E \times E, R \cup R^0, \{f\})$

Exercice 0.25

On utilise le theoreme de Tarski. Ici, la relation definie est clairement un ordre (on rappelle qu'un ordre est *par definition* une relation reflexive, antisymetrique, et transitive). Il suffit donc de montrer que tous ensemble S de $\mathbb{N} \cup \infty$ admet un sup pour cet ordre. On rappelle qu'un sup est la *plus petite* borne superieure d'un ensemble, si elle existe (sinon le sup n'existe pas).

Si S est fini : on prend son max (eventuellement ∞ si $\infty \in S$), qui est defini car l'ordre est total. Tout max d'un ensemble est trivialement un sup.

Si S est infini : on prend $+\infty$ comme sup. Il ne peut pas y avoir d'autre borne sup, sinon S ne serait pas infini. Donc c'est bien un sup.

Exercice 0.27

L'ordre n'est pas bien fonde, parce qu'on peut agrandir la taille des uples indefiniment :

$$(1) > (0, 1) > (0, 0, 1) > ...$$

TD 7 : Terminaison 1

Exercice 0.28

Soit la mesure $M(u, l) = u - (l + 1)$. Une condition *suffisante* (mais pas necessaire, la mesure pourrait rester constante pendant quelques iterations) pour que la fonction termine est que M decroisse strictement apres chaque iteration (car $(\mathbb{N}, <)$ est bien fonde).

Apres une iteration:

- Si ϕ est vrai: $M(u', l') = (u + l)/2 - (l + 1) < (u + (u - 1))/2 - (l + 1) = (2u - 1)/2 - (l + 1)$. Quelle que soit la parite de u, on a $M(u', l') < u - (l + 1) = M(u, l)$, donc la mesure est bien strictement decroissante.

- Si ϕ est faux: $M(u', l') = u - ((u + l)/2 + 1) < u - ((l + 1) + l)/2 + 1) = u - (2l + 1)/2 + 1)$. A nouveau, quelque soit la parite de l, $M(u', l') < u - (l + 1) = M(u, l)$.

Exercice 0.29

Rappels :

- confluence equivalent a “au plus une forme normale”
- confluence implique confluence locale (par definition)
- confluence locale + terminaison implique confluence (Lemme de Newman)
- confluence locale + terminaison implique “exactement une forme normale”

Le systeme ne termine pas $c \to d \to c \to ....$ Il n'est pas confluent : $c \to^* a$ et $c \to^* b$, qui sont deux formes normales distinctes. En revanche, le systeme est localement confluent. Les seuls cas non triviaux sont c qui se reecrit en a et d, mais $a \to^* a$ et $d \to^* a$. De meme, d se reecrit en b et c, et le diagramme se referme en b.

Exercice 0.30

Il suffit d'utiliser l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tous les appels recursifs se font sur des arguments strictement plus petits.

Exercice 0.31

Deux solutions, toutes les deux par recurrence sur n. Le resultat est connu pour $n = 1$ et $n = 2$.

1. On constate que $(x_1, ..., x_{n+1}) >_{n+1}^{lex} (x'_1, ..., x'_{n+1})$ si et seulement si $(x_1, (x_2, ..., x_{n+1})) >_2^{lex} (x'_1, (x'_2, ..., x'_{n+1}))$ avec comme deuxieme ordre $>_n^{lex}$. Par recurrence, $>_n^{lex}$ est bien fonde, et le produit lexicographique de deux ordres est bien fonde (cf. cours), d'ou la conclusion.
2. On adapte la preuve du cours : on projette les valeurs prises par la premieres composante. Necessairement, cette suite doit etre stationnaire a partir d'un certain range, car A_1 est bien fonde. A partir de ce range, on peut considere les autres composantes, qui doivent etre strictement decroissantes : contradiction, puisque $>_n^{lex}$ est bien fonde par hypothese de recurrence.

Exercice 0.32

La question 2 repond a la 1 : on remarque facilement que $X >_k^{prod} Y$ implique $X >_k^{lex} Y$. Les deux ordres ne sont pas egaux : $(1,1) >_2^{lex} (0,3)$ mais $(1,1) \not>_2^{prod} (0,3)$ (d'ailleurs ces deux elements sont incomparables pour $>_2^{prod}$, qui est un ordre partiel). Si $>_k^{prod}$ etait mal fonde, alors $>_k^{lex}$ le serait aussi (par contraposee), ce qui est faux d'apres l'exercice precedent.